Erwartungswert

Im Zusammenhang mit Zufallsvariablen gibt es gewisse Kenngrößen, mit denen man sich eine ungefähre Vorstellung über die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung machen kann.

Bei diesen Kenngrößen handelt es sich um den **Erwartungswert**, die **Varianz** und die **Standardabweichung**. In diesem Abi-Kurs beschäftigen uns ausschließlich mit dem Erwartungswert.

Formal ist der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariablen X wie folgt definiert:

Erwartungswert einer Zufallsvariablen X

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Deutung des Erwartungswerts

Wir können diese Formel in Worten etwa wie folgt verstehen. Eine Zufallsvariable X kann gewisse Werte x_1, x_2 bis x_n annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x_i annimmt ist $P(X = x_i)$.

Das Produkt $x_i \cdot P(X = x_i)$ verleiht dem Wert x_i nun ein gewisses „Gewicht“. Der Wert x_i trägt also nur zu einem gewissen Anteil zu der obigen Summe bei.

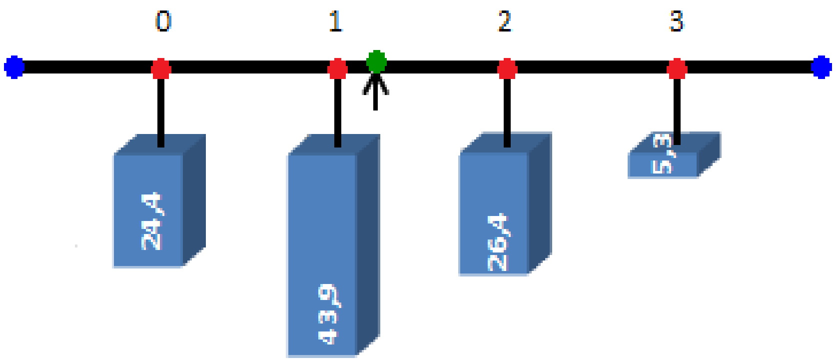
Insofern dürfen wir den Erwartungswert als den **„gewichteten Mittelwert“** der betreffenden Wahrscheinlichkeitsverteilung ansehen

Veranschaulichung

Wir denken uns einen Stab, der für jeden Wert einer Zufallsvariablen X eine Markierung enthält.

An jeder Markierung hängt ein Gewicht, das der jeweiligen Wahrscheinlichkeit entspricht.

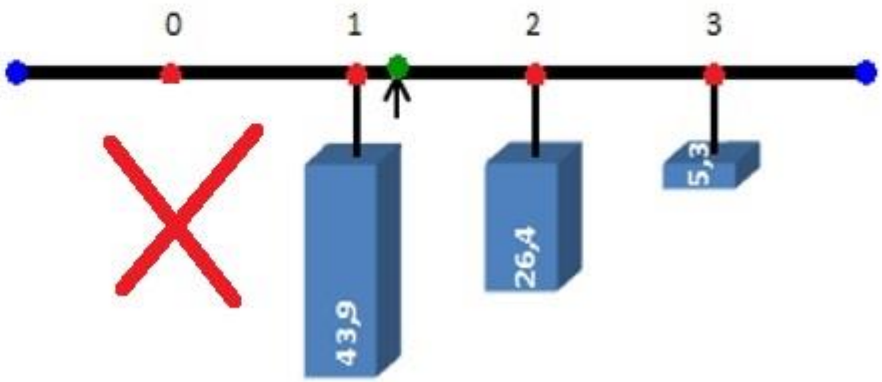
Die Stelle des Schwerpunkts bzw. Gleichgewichtspunkts nennt man den Erwartungswert.



Ein Gewicht bei Markierung 0?

Es gibt jedoch einen kleinen Haken!
In der Abbildung gibt es nämlich eine Markierung 0, an der ein Gewicht hängt.

Da laut der obigen Definition aber das Produkt $0 \cdot P(X = 0)$ gebildet werden muss und dieses mit dem Wert 0 (also gar nicht) zu der obigen Summe beiträgt, dürfen wir an unseren Stab kein Gewicht an die Markierung 0 hängen. Andernfalls wird man von einer solchen Abbildung leicht in die Irre geführt.



Rechenbeispiel 1

Eines der folgenden fünf Wörter werde zufällig gezogen:
DER ZUFALL REGIERT DIE WELT.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Buchstaben und die Zufallsvariable Y die Anzahl der Vokale des gezogenen Wortes. Bestimmen Sie die Erwartungswerte der beiden Zufallsvariablen.

Lösung zu Rechenbeispiel 1

X kann die Werte $3, 4, 6$ oder 7 annehmen. Der Satz DER ZUFALL REGIERT DIE WELT hat 5 Worte, von denen zwei die Länge 3 haben. Also folgt $P(X = 3) = \frac{2}{5} = 0{,}4$. Entsprechend gilt:

$P(X = 4) = \frac{1}{5} = 0{,}2$, $P(X = 6) = \frac{1}{5} = 0{,}2$ und

$P(X = 7) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Der Erwartungswert ergibt sich dann durch:

$$\underline{E(X)} = 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} = \frac{23}{5} = \underline{4{,}6}$$

Lösung zu Rechenbeispiel 1

Die Zufallsvariable Y kann die Werte $1, 2,$ oder 3 annehmen. Mit $P(Y = 1) = \frac{2}{5},\ P(Y = 2) = \frac{2}{5},\ P(Y = 3) = \frac{1}{5}$ folgt:

$$\underline{E(Y)} = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \underline{= 1{,}8}$$

Ergebnis:

Die gesuchten Erwartungswerte sind $E(X) = 4{,}6$ und $E(Y) = 1{,}8$, das bedeutet, dass man (bei langen Versuchs-reihen) im Schnitt eine Wortlänge von $4{,}6$ erhält und dass ein Wort im Schnitt $1{,}8$ Vokale besitzt.

Rechenbeispiel 2

Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt 2 €, wenn er einen Pasch (=zweimal dieselbe Zahl) geworfen hat.

a) Berechne den erwarteten Gewinn!

b) Berechne, wie groß der auszuzahlende Betrag im Gewinnfall sein müsste, damit bei einem Einsatz von 1€ das Spiel fair ist!

Lösung zu Rechenbeispiel 2

a) Hier stellt die Zufallsvariable X den Gewinn dar. Der Spieler gewinnt 0 €, wenn er zwei verschiedene Zahlen wirft und 2 €, wenn er einen Pasch wirft. Demnach ist
$P(X = 0) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ und $P(X = 2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Der erwartete Gewinn ist dann
$\underline{E(X)} = 0 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \underline{= 0{,}33}$.

Ergebnis: Der erwartete Gewinn beträgt etwa <u>33 Cent</u>.

Lösung zu Rechenbeispiel 2

b) Ein Spiel ist dann fair, wenn der erwartete Gewinn genauso hoch ist wie der Einsatz, d.h. wenn $E(X) = 1$ gilt. Den Auszahlungsbetrag a im Gewinnfall berechnen wir dann mit $E(X) = 0 \cdot \frac{5}{6} + a \cdot \frac{1}{6} = 1$, woraus $\underline{a = 6}$ (Euro) folgt.

Ergebnis: Damit das Spiel fair wird muss der Auszahlungs-betrag im Falle eines Gewinns auf $\underline{6\ €}$ festgelegt werden.